XI MISTRZOSTWA W GEOMETRII ELEMENTARNEJ

WROCŁAW, 8 CZERWCA 2013

Zad. 1. W trójkącie *ABC* poprowadzono środkowe *AL* i *BM* przecinające się w *K*. Wierzchołek *C* leży na okręgu przechodzącym przez *K*, *L* i *M*. Wykaż, że środkowa *CN* tworzy z bokami *AC* i *BC* takie same kąty jak pozostałe środkowe z bokiem *AB*.

Zad. 2. W okrąg wpisano czworokąt, którego kolejne boki mają długości *a*, *b*, *c* i *d*. Oblicz stosunek długości przekątnych czworokąta.

Zad. 3. Przez punkt *D* na boku *AB* trójkąta *ABC* poprowadzono równoległą do *AC* przecinającą bok *BC* w *E*. Wykaż, że *AE*, *CD* i środkowa *BM* przecinają się w jednym punkcie.

Zad. 4. Odcinek łączący środki podstaw trapezu (tzw. druga linia średnia) ma długość równą połowie różnicy długości podstaw. Oblicz sumę kątów przy dłuższej podstawie tego trapezu.

Zad. 5. W czworokącie *ABCD* przez środek przekątnej *BD* poprowadzono równoległą do przekątnej *AC* przecinającą bok *AB* w punkcie *E*. Wykaż, że odcinek *CE* dzieli czworokąt na figury o równych polach.

Zad. 6. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długościach *a* i *b*. Oblicz długość odcinka dwusiecznej zawartego w trójkącie.

Zad. 7. W trójkącie *ABC* poprowadzono środkowe *AL* i *BM* przecinające się w *K*. Wierzchołek *C* leży na okręgu przechodzącym przez *K*, *L* i *M*. Oblicz długość środkowej *CN*, wiedząc, że *AB* = *a*.

Zad. 8. W trójkącie *ABC* na boku *AC* obrano *D* i *E*, tak że *AB*=*AD* i *BE*=*CE*, przy czym *E* leży między *A* i *D*. Punkt *F* to środek łuku *BC* (niezawierającego *A*) okręgu opisanego na trójkącie *ABC*. Wykaż, że punkty *B*, *E*, *D* i *F* są współokręgowe.

Zad. 9. Na płaszczyźnie dane jest koło, punkt *A* w jego wnętrzu i punkt *B*   *A*. Rozważmy wszystkie okręgi przechodzące przez *B* oraz przez *X* i *Y*, gdzie *XY* jest dowolną cięciwą danego koła zawierającą *A*. Wykaż, że środki tych okręgów leżą na jednej prostej.

Zad. 10. Okręgi S_1 i S_2 o środkach O_1 i O_2 przecinają się w *A* i *B*. Okrąg przechodzący przez O_1, O_2 i *A* przecina powtórnie okrąg S_1 w *D*, okrąg S_2 w *E*, a prostą *AB* w *C*. Wykaż, że *CD* = *CE* = *CB*.

Zad. 11. Okręgi S_1 i S_2 o środkach O_1 i O_2 przecinają się w *A* i *B*. Półproste O_1B i O_2B przecinają odpowiednie okręgi w *E* i *F*. Przez *B* prowadzimy prostą równoległą do *EF*. Przecina ona okręgi w *M* i *N*. Wykaż, że *MN* = *AE* + *AF*.