IIIX MISTRZOSTWA POLSKI W GEOMETRII ELEMENTARNEJ
WROCŁAW 6 VI 2015

Zad. 1. Czworokąt *ABCD* o prostopadłych przekątnych wpisano w okrąg o środku *O*. Wykaż, że łamana *AOC* dzieli czworokąt na dwie części o równych polach.

Zad. 2. W czworokącie *ABCD*, zachodzi $|AB|=|BC|=1$, $|\measuredangle ABC| = 100°$, $|\measuredangle ADC| = 130°$. Oblicz $|BD|$.

Zad. 3. Na odcinku *AB* o długości *R* zbudowano jako na średnicy okrąg. Drugi okrąg o takim samym promieniu ma środek w punkcie *A*. Ile wynosi promień okręgu, który jest styczny wewnętrznie do pierwszego, a zewnętrznie do drugiego z tych okręgów oraz jest styczny do prostej *AB*.

Zad. 4. Na okręgu opisano trapez równoramienny. Oblicz jego pole, znając długość ramienia *l* i jednej z podstaw *a*.

Zad. 5. Dane są dwa okręgi. *A* i *B* będą są najbardziej odległymi z punktów przecięcia tych okręgów z prostą łączącą ich środki. Z punktu *A* prowadzimy styczne do okręgu, na którym leży *B*, a następnie okrąg styczny do tych stycznych i wewnętrznie styczny do okręgu, na którym leży *A*. Analogicznie postępujemy z punktem *B*. Wykaż, że tak otrzymane okręgi są przystające.

Zad. 6. W trójkącie *KLM* dwusieczne *KN* i *LP* przecinają się w *Q*. Punkty *Q*, *M*, *N*, *P* są współokręgowe i $|PN| = 1$. Oblicz długości boków i kąty trójkąta *PNQ*.

Zad. 7. Dany jest czworokąt *ABCD*. Na prostych *AC* i *BD* obrano odpowiednio punkty *K* i *M*, takie że *BK* *AD* i *AM* *BC*. Wykaż, że *KM* *CD*.

Zad. 8. W okrąg wpisano czworokąt *ABCD*. *M* jest punktem przecięcia prostych *AB* i *CD*, a *N* – punktem przecięcia prostych *BC* i *AD*. Niech *E* jest punktem przecięcia danego okręgu z okręgiem opisanym na trójkącie *BMN*, różnym od *B*. Wykaż, że prosta *ED* dzieli odcinek *MN* na połowy.

Zad. 9. Dany jest trójkąt równoramienny, w którym $|AC| = |BC| = 1$ oraz | *ACB*| = 36 . Oblicz długość odcinka dwusiecznej kąta *CBA*, który zawiera się w tym trójkącie.

Zad. 10. Wewnątrz kąta ostrego *ABC* obrano punkt *M*. Wpisz w ten kąt trójkąt o najmniejszym obwodzie, tak aby jednym z wierzchołków był M, a pozostałe leżały na ramionach kąta. Opisz kroki konstrukcji i uzasadnij jej poprawność.

Zad. 11. W trójkącie równoramiennym *ABC*, w którym $|AC|=|BC|$, poprowadzono dwusieczną *BD*. Prosta prostopadła do tej dwusiecznej przechodząca przez środek okręgu opisanego na trójkącie *ABC* przecina bok *BC* w punkcie *E*. Natomiast prosta przechodząca przez *E* i równoległa do *BD* przecina bok *AC* w punkcie *F*. Wykaz, że $|CE| = |FD|$.

Zad. 12. W trójkącie ostrokątnym *ABC* punkty *K*, *L*, *M* są spodkami wysokości. Wykaż, że pole trójkąta *ABC* jest równe iloczynowi promienia okręgu nań opisanego i połowy obwodu trójkąta *KLM*.