XV Mistrzostwa Polski w Rozwiązywaniu Zadań z Geometrii Elementarnej
Wrocław, 3 czerwca 2017

Zad. 1. W pewien kąt wpisano okrąg o promieniu R. Odcinek łączący punkty styczności ma długość a. Równolegle do tego odcinka poprowadzono dwie styczne do okręgu, otrzymując trapez o podstawach zawartych w tych stycznych. Oblicz jego pole.

Zad. 2. W trójkącie ABC o długościach boków $|BC|=14$, $|AC|=15$ i $|AB|=13$ oblicz odległość wierzchołka A od ortocentrum (punktu przecięcia wysokości).

Zad. 3. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 4 i 8. Jego pole wynosi 21. Co przecina dwusieczna kąta przy dłuższej podstawie: krótszą podstawę czy ramię?

Zad. 4. W trójkąt o długościach boków 6, 10 i 12 wpisano okrąg. Styczna do okręgu przecina dwa dłuższe boki. Oblicz obwód odciętego przez nią trójkąta.

Zad. 5. W trójkącie ABC poprowadzono środkowe AL i BM przecinające się w punkcie K. Wierzchołek C leży na okręgu przechodzącym przez K, L i M. Wykaż, że środkowa CN tworzy z bokami AC i BC takie same kąty, jakie środkowe AL i BM tworzą z bokiem AB.

Zad. 6. Dane są dwa współśrodkowe okręgi. Wykaż, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu jednego z okręgów od końców średnicy drugiego nie zależy ani od wyboru punktu, ani średnicy.

Zad. 7. Okręgi przecinają się w punktach A i B. Przez A prowadzimy sieczną, która przecina okręgi w punktach C i D. Przez C i D prowadzimy styczne, które przecinają się w punkcie E. Wykaż, że miara kąta CED nie zależy od wyboru siecznej.

Zad. 8. W trójkącie ABC kąt A jest rozwarty. Znajdź na boku BC taki punkt K, że $|AK| = \sqrt{|BK| \cdot |KC|}$.

Zad. 9. W trójkącie ABC kąt C jest prosty, a CD oznacza wysokość opuszczoną z C. W trójkąty ADC i BDC wpisano okręgi. Wykaż, że dwusieczna kąta C jest prostopadła do odcinka łączącego środki tych okręgów.

Zad. 10. Okrąg jest styczny do boków AB, BC i CD równoległoboku $ABCD$ odpowiednio w punktach K, L i M. Wykaż, że prosta KL połowi wysokość równoległoboku opuszczoną z C na prostą AB.

Zad. 11. W trójkącie ABC obrano punkt P na boku AB, taki że $|AP|=2|PB|$. Niech Q oznacza środek boku AC. Wiedząc, że $|PC|=2|PQ|$, wykaż, że trójkąt jest prostokątny.