XVII Mistrzostwa Polski w Geometrii Elementarnej

Wrocław, 2019

Zad. 1. AL jest dwusieczną w trójkącie ABC, a punkt D leży na boku AC tak, że kąty DLC i BAC są przystające. Wykaż, że $|DL| = |LB|$.

Zad. 2. W trapezie podstawy mają długości 10 i 26, a przekątne są prostopadłe do boków. Oblicz pole tego trapezu.

Zad. 3. Z wierzchołka A kąta ostrego rombu $ABCD$ poprowadzono prostopadłe do prostych BC i CD, przecinające je odpowiednio w punktach K i L. Wiedząc, że $|AL| = |AK| = 3$ oraz $|KL| = 3\sqrt{3}$, oblicz długości przekątnych rombu.

Zad. 4. W trapezie $ABCD$, gdzie AB i CD są podstawami, ramię BC ma długość 8 cm. Odległość środka ramienia AD od prostej BC wynosi 10 cm. Oblicz pole tego trapezu.

Zad. 5. Wykaż, że w trójkącie odległość wierzchołka od ortocentrum (punktu przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta) jest dwa razy większa niż odległość środka okręgu opisanego na tym trójkącie od boku leżącego naprzeciw tego wierzchołka.

Zad. 6. W trójkącie ostrokątnym ABC ortocentrum oznaczmy przez H. Wiedząc, że $|CH| = |AB|$, oblicz miarę kąta C.

Zad. 7. Na trójkącie ABC opisano okrąg. Styczna do okręgu w punkcie B przecina prostą AC w punkcie M. Znajdź stosunek długości AM do MC, jeśli stosunek długości AB do BC wynosi k.

Zad. 8. Czworokąt $ABCD$ o prostopadłych przekątnych wpisano w okrąg. Z wierzchołków B i C poprowadzono proste prostopadłe do boku AD. Przecinają one przekątne AC i BD odpowiednio w punktach E i F. Oblicz długość EF, wiedząc że $|BC| = 1$.

Zad. 9. Prosta PA jest styczna do okręgu w punkcie A. Cięciwa BC jest równoległa do PA. Proste PB i PC przecinają okrąg w punktach odpowiednio K i L. Wykaż, że prosta KL połowi odcinek PA.

Zad. 10. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg zachodzi $|CD| = |AD| + |BC|$. Wykaż, że dwusieczne kątów A i B przecinają się na boku CD.

Zad. 11. W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku O. Niech K_1, K_2 i K_3 oznaczają punkty styczności okręgu odpowiednio z bokami BC, CA i AB. Na odcinkach OK_1, OK_2 i OK_3 obrano punkty P, Q i R w równej odległości od O. Wykaż, że proste AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie.